

Câu 1: (3,0 điểm)

Cho phương trình vi phân là mô hình toán của một hệ dao động đàn hồi cơ khí với $y(x)$ là hàm mô tả chuyển vị của hệ:

$$y''(x) + 6y'(x) + 13y(x) = 0 \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7$$

- Áp dụng biến đổi Laplace để tìm ảnh $Y(s)$ của $y(x)$. (1,5 điểm)
- Dùng biến đổi Laplace ngược để tìm đáp ứng tín hiệu $y(x)$. (1,5 điểm)

Câu 2: (2,0 điểm)

Công thức tính khối lượng của một thanh kim loại tròn được tính như sau:

$$m = \int_0^L \rho(x)S(x)dx$$

$\rho(x)$ là khối lượng riêng (mật độ khối lượng), $S(x)$ là diện tích mặt cắt ngang, L là chiều dài của thanh kim loại, $0 \leq x \leq L$.

Bảng dữ liệu dưới đây là của một thanh kim loại có chiều dài 13 mét:

Bảng 1:

x (m)	0	2	4	7	10	13
ρ (g/cm ³)	5,6	5,6	5,6	2,7	2,7	2,7
S (cm ²)	120	110	110	100	90	60

Áp dụng các phương pháp tích phân số Simpson phù hợp để tính tổng khối lượng của thanh kim loại.

Câu 3: (2,0 điểm)

Một mô hình cơ khí được treo trong đường hầm gió để tiến hành thực nghiệm. Lực tác động lên mô hình phụ thuộc vào tốc độ gió và được ghi nhận theo bảng sau:

Bảng 2:

v (m/s)	20	30	40	50	70	80
F (N)	80	390	600	720	1430	1650

Áp dụng phương pháp nội suy Newton đa thức bậc 2 để xác định lực tác động F khi $v = 62$ (m/s) (tính chính xác đến 4 chữ số sau dấu phẩy).

ĐÁP ÁN

Câu 1 (3 điểm)

a. Áp dụng biến đổi Laplace để tìm ảnh $Y(s)$ của $y(t)$. (1,5 điểm)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dy^2}\right] + 6\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dx}\right] + 13\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$\begin{aligned} & [s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] \\ & + 6[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] + 13\mathcal{L}\{y\} = 0, \end{aligned} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$y(0) = 3 \text{ and } y'(0) = 7$$

$$\begin{aligned} & s^2\mathcal{L}\{y\} - 3s - 7 + 6s\mathcal{L}\{y\} \\ & - 18 + 13\mathcal{L}\{y\} = 0 \end{aligned} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$(s^2 + 6s + 13)\mathcal{L}\{y\} = 3s + 25$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{3s + 25}{s^2 + 6s + 13} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

b. Dùng biến đổi Laplace ngược để đáp ứng tín hiệu $y(t)$. (1,5 điểm)

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s + 25}{s^2 + 6s + 13}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s + 25}{(s + 3)^2 + 2^2}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3(s + 3) + 16}{(s + 3)^2 + 2^2}\right] \end{aligned} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3(s + 3)}{(s + 3)^2 + 2^2}\right] \\ &+ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8(2)}{(s + 3)^2 + 2^2}\right] \end{aligned} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$y = e^{-3t}(3 \cos 2t + 8 \sin 2t) \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Câu 2	2,0 điểm
<p>Tính khối lượng thanh kim loại</p> <p>Từ bảng số liệu và đồ thị nhận thấy dữ liệu đo đạc gồm 5 khoảng với</p> <ul style="list-style-type: none"> - Luật Simpson 1/3 cho 2 khoảng đầu (I_1) - Luật Simpson 3/8 cho 3 khoảng sau (I_2) - Đặt $f(x) = \rho(x)S(x) \Rightarrow f(x_i) = \rho(x_i)S(x_i)$ 	0,5
$I_1 = \left(\frac{L1}{6}\right)[f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5)]$ $= \frac{400}{6}(672 + 4 \times 616 + 616)$ $= 250133,33 \text{ (g)} = 250,133 \text{ (kg)}$ $I_2 = \left(\frac{L2}{8}\right)[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$ $= \left(\frac{1300 - 400}{8}\right)(616 + 3 \times 270 + 3 \times 243 + 162)$ $= 260662,5 \text{ (g)} = 260,6625 \text{ kg}$	0,5
$I = I_1 + I_2 = 510,7955 \text{ kg}$	0,5

Câu 3 Phương pháp Newton bậc 2	2,0 điểm
$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$	
<p>$v = 62 \text{ m/s}$, Tìm F</p> <p>Chọn ra 3 điểm thích hợp từ bảng dữ liệu để đưa vào hàm nội suy</p> <p>$(x_0, y_0) = (50; 720)$ $(x_1, y_1) = (70; 1430)$ $(x_2, y_2) = (80; 1650)$</p>	0,5
<p>Tìm b_0, b_1, b_2</p> $b_0 = f(x_0) = 720$ $b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 35,5$ $b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = -0,45$	0,25 0,25 0,5
<p>Cuối cùng tìm:</p> $f_2(x) = 720 + 35,5(x - x_0) - 0,45(x - x_0)(x - x_1)$ $f_2(62) = 1189,2$ <p>Suy ra $F = 1189,2 \text{ N}$</p>	0,5

Câu 4

Định thức ma trận A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 16 \\ 100 \\ -16 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} s \\ v \\ a \end{bmatrix} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 41$$

a) Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A

Sinh viên phải trình bày cách tính mới được trọn điểm (1 điểm)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 10 \\ 15 & -7 & 2 \\ 9 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

(0,5 điểm)

$$A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} -7 & 6 & 10 \\ 15 & -7 & 2 \\ 9 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

(0,5 điểm)

Giải hệ phương trình trên

$$\begin{bmatrix} s \\ v \\ a \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} -7 & 6 & 10 \\ 15 & -7 & 2 \\ 9 & 4 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 100 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

(0,5 điểm)